

## Módulo 5

### GEOMETRÍA 3D

#### CONTENIDOS

Durante el desarrollo de este módulo podrás utilizar las herramientas disponibles en GeoGebra para:

- Construir sólidos y explorar sus propiedades.
- Profundizar acerca del concepto de volumen y área lateral de un sólido y su independencia.
- Relaciones métricas entre sólidos semejantes.
- Estudiar sólidos platónicos y arquimedianos.
- Estudiar las Cónicas como secciones planas de un cono

#### MARCO CONTEXTUAL DE LA CLASE

En el marco de la enseñanza de la geometría que venimos desarrollando desde los módulos anteriores del presente curso, la geometría tridimensional merece un capítulo especial.

Su estudio favorece las habilidades espaciales de los estudiantes y la percepción visual, además del razonamiento lógico. Sin embargo, se encuentra bastante relegada en la enseñanza en todos los niveles educativos. A menudo, el conocimiento geométrico del espacio tridimensional que circula en las escuelas se limita a clasificar sólidos simples (esferas, conos, poliedros y cilindros) y unas cuantas fórmulas para determinar áreas y volúmenes.

Esta ausencia de la enseñanza de la geometría tridimensional en el currículum real se da pese a que en los diseños curriculares de nuestra provincia tiene presencia. En ellos, se propone el estudio de los cuerpos geométricos, sus secciones, sus propiedades, los cuerpos regulares (platónicos), los arquimedianos, la semejanza entre cuerpos, posiciones relativas entre planos, rectas y entre planos y rectas.

Andrade y Montecino (2011) analizan las dificultades en el aprendizaje de lo espacial cuando se utilizan representaciones icónicas planas. Mencionan, por ejemplo, como un obstáculo que los objetos tridimensionales, por lo general, se representan bidimensionalmente en el aula. Esto dificulta la construcción de una correcta *imagen mental* por parte del alumno. También mencionan dificultades a la hora de aprehender objetos matemáticos que se generan dinámicamente, como los sólidos de revolución, al contar únicamente con representaciones estáticas de los mismos.

Desde la antigüedad se utilizan para la enseñanza “manipulables físicos” –por ejemplo los cuerpos en madera que suelen haber en las aulas-, pero más recientemente, con el auge de las tecnologías digitales, se ha comenzado a incorporar los “manipulables virtuales”, que permiten abordar varias de las dificultades descriptas en el párrafo anterior.

En lo que sigue, proponemos algunas actividades que promueven el aprendizaje de la geometría 3D utilizando GeoGebra, considerando los lineamientos del diseño curricular de la Provincia de Buenos Aires.

## ACTIVIDADES

El objetivo del primer ejemplo es, para el docente, familiarizarse con las herramientas de la Vista gráfica 3D de GeoGebra y su utilización. Para el alumno, además de esto, podría tener como objetivo que se familiarice con los distintos tipos de sólidos, sus posiciones relativas, su construcción.





### Ejemplo 5.1 - Identificando y clasificando cuerpos geométricos

Construir en la vista gráfica 3D de GeoGebra un modelo de casa.

- ¿Qué sólido podemos utilizar para la casa?
- ¿Y para un techo a dos aguas?
- ¿Y para el tanque de agua?
- ¿Una chimenea?
- Utilizar figuras planas para colocar puertas y ventanas.

### Ejemplo 5.2 – Desarrollo de poliedros

Se desea construir un depósito con forma de prisma rectangular recto de base cuadrada cuyo volumen sea  $36 \text{ cm}^3$ :

- Construir un cuadrado en la vista gráfica 2D utilizando la herramienta *Polígono regular* .
- Abrir la vista gráfica 3D y utilizar la herramienta *Prisma o cilindro desde su base*  para construir un modelo dinámico del depósito. **Pista:** una vez seleccionada la herramienta, hacer clic sobre el cuadrado en la Vista gráfica 3D y luego ingresar en “Altura” el valor de la altura como una función del lado de la base.
- Determinar el volumen del prisma utilizando la herramienta *Volumen* .
- Utilizar la herramienta *Desarrollo*  para visualizar el desarrollo de este cuerpo.

#### **Para investigar:**


- Al aumentar la longitud del lado de la base ¿Qué ocurre con el volumen? ¿Aumenta, disminuye o se mantiene?
- ¿Y qué ocurre con el área lateral del cuerpo?
- ¿Existe una relación entre el volumen de un cuerpo y su área lateral?

**Pista:** La expresión del desarrollo en la vista algebraica representa el área lateral del cuerpo. Esto permite estudiar su variación.

En caso de no lograr la construcción, ver la siguiente:

<https://www.geogebra.org/m/NyCDCCXz>

### Ejemplo 5.3 - Conjeturando acerca de los volúmenes de prismas y pirámides

- Trazar un cuadrilátero cualquiera en el plano  $xy$  en la Vista gráfica 2D, lo llamaremos *polígono1*.
- Tomando *polígono1* como base, construir un prisma.
- Colocar un punto P en la cara superior del prisma (aquella que es paralela al *polígono1*) y trazar la pirámide  que tiene como base a *polígono1* y ápice en el punto P.

#### Para investigar:




- ¿Varía el volumen de la pirámide a medida que se mueve el punto P?
- ¿Existe alguna relación entre los volúmenes de la pirámide y el prisma original?
- Modifica los vértices de *polígono1* para analizar si la relación encontrada se mantiene.

## VOLÚMENES Y ÁREAS DE CUERPOS SEMEJANTES

En el diseño curricular de 5<sup>to</sup> año de la Escuela Secundaria se establece que: “El tema de cuerpos semejantes y del análisis de la razón entre sus áreas y volúmenes merece un tratamiento cuidadoso, dado que es frecuente que los alumnos de cursos superiores presenten dificultades al momento de resolver problemas vinculados a esta temática. Se puede ayudar a los estudiantes a construir estrategias mediante la visualización de representaciones en ejes de figuras tridimensionales sencillas; para luego acompañarlas con el estudio de las razones entre sus aristas, caras y el planteo de la razón entre sus volúmenes, tanto desde lo algebraico, como desde la visualización geométrica”.

### ACTIVIDADES

#### Ejemplo 5.4

- Construir con GeoGebra un tetraedro  con base en el plano  $xy$  de la Vista Gráfica 3D.
- Colocar un punto P sobre el eje z y trazar el plano paralelo al  $xy$  que pase por P .
- Hallar la intersección entre este plano y el tetraedro .
- Utilizando los puntos de esta intersección, construir un segundo tetraedro, el cual será semejante al anterior.

#### Para investigar:

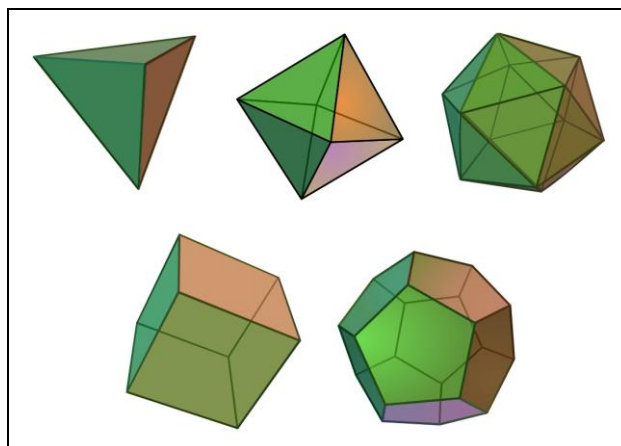
- ¿Podrías encontrar la razón de semejanza entre los volúmenes?
- ¿Y entre las áreas laterales?

## SÓLIDOS PLATÓNICOS

**Definición:** Un poliedro se llama regular o platónico cuando cumple estas dos condiciones:

- 1) Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- 2) En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras



Existen únicamente 5 sólidos platónicos:

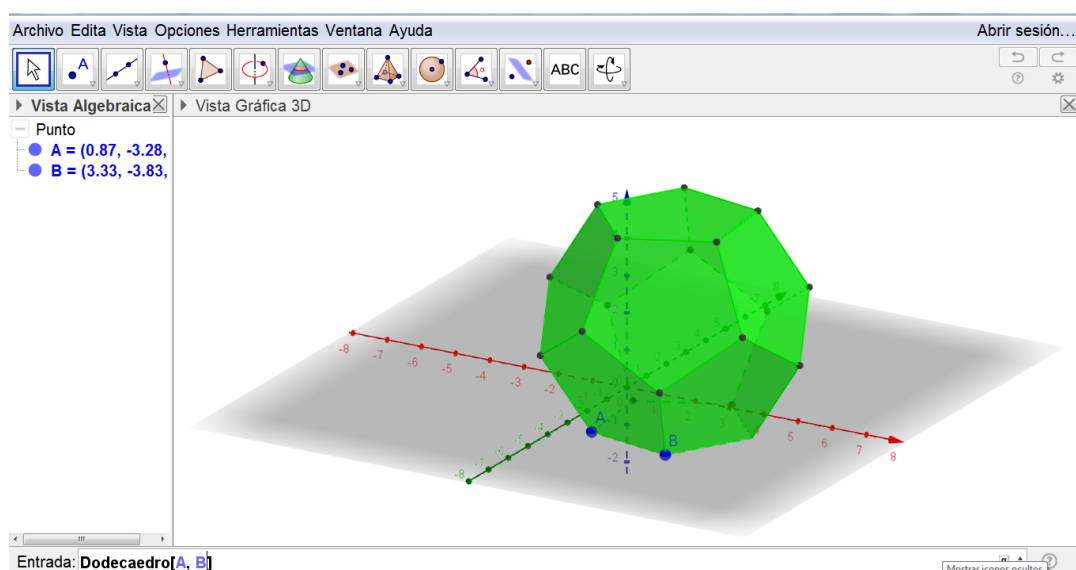


Sólidos platónicos: Arriba (de izquierda a derecha): Tetraedro, Octaedro e Icosaedro. Abajo (de izquierda a derecha): Cubo y Dodecaedro. Fuente:

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Platonic\\_solids.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Platonic_solids.jpg)

En GeoGebra:

- El cubo y el tetraedro se pueden construir a partir de herramientas  y .
- Los cinco se pueden generar por medio de comandos. Por ejemplo, para hacer un dodecaedro, coloca dos puntos en cualquier lugar del espacio, A y B, luego ingresa en la Barra de entrada “Dodecaedro(A,B)” y presiona Enter.



## ACTIVIDADES

**Para Investigar:** Construir un cubo con GeoGebra y a continuación, marcar los puntos medios de cada cara. Tomando estos puntos como vértices ¿Qué cuerpo se puede formar?

### *El Dual de un Sólido Platónico*

Dado un sólido platónico, si se construye un poliedro tomando como vértices los puntos medios de sus caras, se obtiene otro sólido platónico. Por ejemplo, a partir de la actividad anterior, dado el cubo pudo construirse, tomando los puntos medios de las caras, un octaedro. **Se dice que este octaedro es el *dual* del cubo.**

### **Para investigar:**

- ¿Cuál será el dual del octaedro?
- ¿Cuáles serán los duales del dodecaedro, del icosaedro y del tetraedro?
- ¿Te animas a construir otro par de duales con GeoGebra?

### **Para saber más:**

Puedes encontrar más información adicional sobre los sólidos platónicos y sus duales en los artículos que hemos compartido en la carpeta Bibliografía del módulo 5 en Moodle:







- Alsina, C. (2011) Las mil caras de la belleza geométrica. Los poliedros. Navarra: RBA Coleccionables S.A.
- González, P.M. Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares. DivulgaMAT, Real Sociedad Matemática Española, disponible en: <https://goo.gl/OEaAgZ>

**Actividad adicional:** Construye un cubo y traza las diagonales cruzadas de dos caras paralelas. ¿Podrías construir un tetraedro regular que tenga como aristas las diagonales que trazaste?

## SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

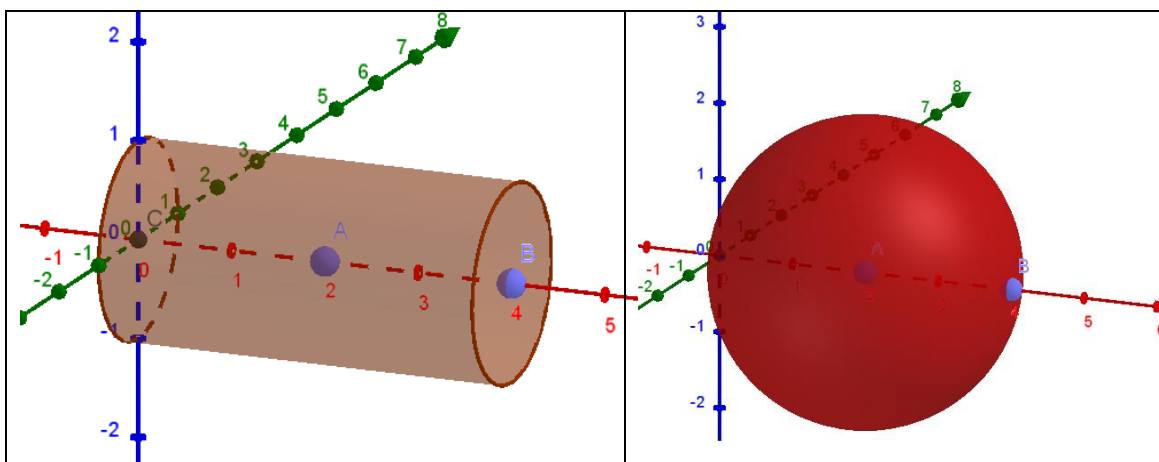
**Definición:** Se llama cuerpo o sólido de revolución a los cuerpos geométricos que se generan haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.

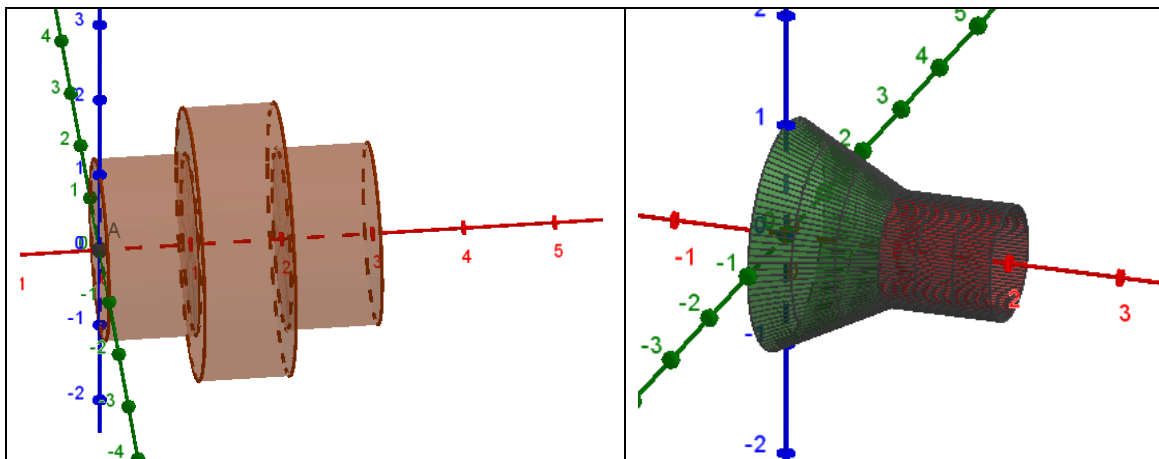
### Ejemplo 5.5: Crear un cono de revolución

- Crear un punto A  en el origen de coordenadas de la Vista Gráfica 3D.
- Trazar una circunferencia utilizando la herramienta *Circunferencia* (*centro, radio, dirección*)  tomando como centro el origen de coordenadas; como dirección, el eje x (en la configuración predeterminada, es el rojo); como radio, coloca 2 unidades.
- Colocar un punto B  sobre el eje x (por ejemplo, el (3,0,0)).
- Colocar un punto C  sobre la circunferencia trazada previamente. **Pista:** para asegurarte de que el punto está en la circunferencia, muévelo utilizando la herramienta *Elige y Mueve* . El punto debe moverse, pero no debe poder quitarse de la circunferencia.
- Trazar, utilizando la herramienta *Polígono*  el triángulo ABC.
- Hacer clic sobre el triángulo ABC con el botón secundario del mouse y seleccionar Rastro del menú emergente.
- Hacer clic sobre el punto B con el botón secundario del mouse y seleccionar Animación.

## ACTIVIDADES

Generar los siguientes sólidos haciendo rotar alguna figura plana:





Con lo que has trabajado hasta aquí, seguramente ya tienes un buen panorama de qué tipo de actividades se pueden realizar en el aula con la vista 3D de GeoGebra. A continuación, te ofrecemos algunos ejemplos más, de carácter optativo, relacionados también con la propuesta de los Diseños Curriculares de la Provincia de Buenos Aires.

**OPCIONALES**

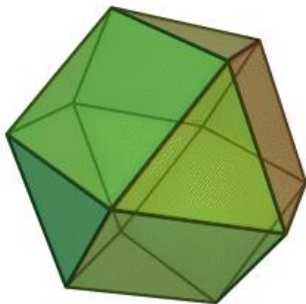
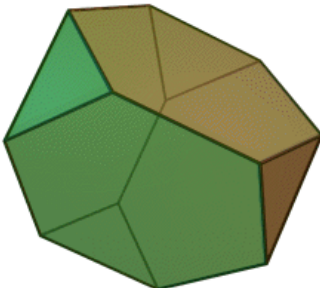
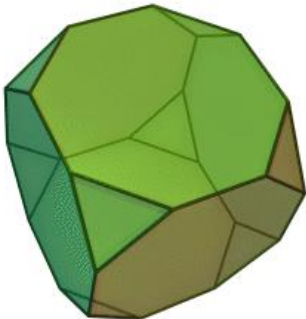

**SOLIDOS ARQUIMEDIANOS**

**Definición:** Se trata de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos, a diferencia de los sólidos platónicos que poseen todas sus caras iguales.

**Actividad:** Observar y construir en GeoGebra los siguientes sólidos arquimedianos.

**Pistas:**

- Para el tetraedro y el cubo truncados, partir de un tetraedro o un cubo, respectivamente, y pensar a qué distancia de los vértices se deben colocar los puntos de corte para generar todas caras regulares (Nivel de dificultad, II)
- Para el cuboctaedro, es conveniente intentar imaginarlos inscriptos en un cubo.
- El rombicuboctaedro, es un cuboctaedro truncado.
- Una posibilidad alternativa, es pensar en los desarrollos planos de estos cuerpos geométricos y “plegarlos” utilizando la herramienta Rotación Axial.

 <p><b>Cuboctaedro</b></p>	 <p><b>Tetraedro truncado</b></p>
 <p><b>Cubo truncado</b></p>	 <p><b>Rombicuboctaedro</b></p>

Fuente de las imágenes: Wikipedia (En este sitio, se pueden encontrar estas figuras animadas, lo que permite su visualización desde distintos ángulos, lo cual ayuda a su construcción).



**Ver soluciones paso a paso aquí:**


**Tetraedro truncado:** <https://www.geogebra.org/m/PbFgaESA>

**Cuboctaedro:** <https://www.geogebra.org/m/wyXcqZgk>

## SECCIONES DE UN CUBO

¿Qué polígono es posible formar al cortar un cubo con un plano?

### Ejemplo 5.6:

- Construir un cubo con la herramienta adecuada en GeoGebra.
- Considerar uno de los vértices. En ese vértice, concurren tres aristas. Colocar un punto en cada una de esas tres aristas.
- Utilizando la herramienta *Plano por tres puntos* , construir el plano que pasa por esos tres puntos.
- Con la herramienta *Intersección*, hallar la intersección entre el cubo y el plano.  
**Pista:** para seleccionar el cubo, es conveniente hacerlo desde la Vista algebraica.
- Hacer clic con el botón secundario del mouse sobre el plano y seleccionar *Representación 2D*. Esto abrirá una vista bidimensional en la que se podrá observar todos los objetos que yacen sobre el plano.

### Para investigar:

¿En qué aristas deberías colocar los puntos si quieres formar:

- Un cuadrado?
- Un pentágono?
- Un rectángulo no cuadrado?
- Un hexágono?

Si alguna de estas configuraciones no es posible, intenta explicar por qué.

## SECCIONES CÓNICAS

En el módulo 4, ya se ha trabajado con las secciones cónicas como lugares geométricos. En este módulo se retoman estas curvas como intersecciones de un cono con un plano, que es lo que les da su nombre.



Para ello, proponemos trabajar con el siguiente applet:  
<https://www.geogebra.org/m/byVjPKSp>

- Mover el deslizador  $\alpha$  para visualizar cómo se pueden obtener las distintas cónicas estudiadas en el módulo 4 como intersecciones entre el cono y el plano.
- ¿Cómo debe ser el ángulo entre el plano y el eje, o entre el plano y la generatriz para obtener cada una de las cónicas?

**Pista:** Para saber cómo fue creado este applet (o cualquier otro que encuentres en el sitio web de GeoGebra), debes:

Buscar el ícono  en la esquina superior derecha de la pantalla.

Hacer clic sobre él y seleccionar: Abrir con GeoGebra

- a. Seleccionar el ícono  en la esquina superior derecha de la pantalla
- b. En el menú emergente, seleccionar la opción Vista, y luego Protocolo de la construcción.
- c. Cierra el menú haciendo clic nuevamente en  y a la derecha de la pantalla encontrarás una nueva Vista de GeoGebra que contiene una tabla en la que se encuentra paso a paso lo que el creador del applet fue construyendo para lograr ese recurso.

## Bibliografía

Dirección General de Cultura y Educación (2006). Diseños Curriculares para la Escuela Secundaria de la Provincia de Buenos Aires.

Andrade, M. & Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife.

Alsina, C. (2011) Las mil caras de la belleza geométrica. Los poliedros. Navarra: RBA Coleccionables S.A.

González, P.M. Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares. DivulgaMAT, Real Sociedad Matemática Española, disponible en: <https://goo.gl/OEaAgZ>